

محل مهر مدرسه تاریخ آزمون : شروع آزمون : مدت آزمون : ۱۲۰ دقیقه تعداد صفحه : ۵	بسمه تعالی مدیریت آموزش پرورش منطقه ۳ تهران ارزشیابی نوبت اول سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ دبیرستان دوره دوم کوشش	کلید درس : گسسته پایه و رشته تحصیلی : دوازدهم ریاضی نام و نام خانوادگی : شماره کارت : نام دبیر :
---	---	--

بارم	محفل علم و دانش، باغ بهشت است امام علی (ع)	ردیف
------	--	------

	<p>-۱</p> <p>۱) $y^2+1 \geq 2x(y-x+1) \leftrightarrow y^2+1 \geq 2xy-2x^2+2x \leftrightarrow 2x^2+y^2-2xy-2x+1 \geq 0$ (نمره ۰/۵)</p> <p>$\leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(x^2-2x+1) \geq 0 \leftrightarrow (x-y)^2+(x-1)^2 \geq 0$ همواره درست (نمره ۰/۵)</p> <p>۲) $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leftrightarrow a^3+b^3 \geq ab^2+ba^2 \leftrightarrow a^3-ab^2+b^3-ba^2 \geq 0$ (نمره ۰/۲۵)</p> <p>(۰/۲۵) $\leftrightarrow \underbrace{(a-b)^2}_{\geq 0} \underbrace{(a+b)}_{a,b>0 \rightarrow a+b>0} \geq 0$ همواره درست (نمره ۰/۵)</p> <p>$\leftrightarrow a(a^2-b^2)+b(b^2-a^2) \geq 0 \leftrightarrow (a^2-b^2)(a-b) \geq 0$ $a,b>0 \rightarrow a+b>0$</p> <p>-۲</p> <p>الف) $\left. \begin{array}{l} \alpha+\beta \notin Q' \rightarrow \alpha+\beta \in Q \\ \alpha \in Q \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{فرض}} \beta \in Q \quad \text{نمره } ۰/۵ \quad \text{نمره } ۰/۲۵$ $\beta \in Q' \quad \text{نمره } ۰/۲۵$</p> <p>$\alpha \in Q \longrightarrow \beta \in Q'$</p> <p>فرض خلف نادرست است در نتیجه $\rightarrow \alpha+\beta \in Q'$ (نمره ۰/۲۵)</p> <p>ب) $\sqrt{11}+\sqrt{2} \in Q \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (نمره ۰/۲۵) \underbrace{11+2+2\sqrt{22}}_a \in Q \rightarrow \sqrt{22} = \frac{a-13}{2} \in Q$ (نمره ۰/۲۵)</p> <p>$\rightarrow \sqrt{11}+\sqrt{2} \notin Q'$ (نمره ۰/۲۵) فرض خلف</p> <p>(نمره ۰/۲۵) فرض خلف نادرست است در نتیجه حکم اثبات ??? \rightarrow (می دانیم $\sqrt{22}$ یک عدد گنگ است)</p> <p>$\rightarrow \sqrt{22} \in Q$ ✘</p> <p>-۳</p>	
--	--	--

$$a \equiv -3 \pmod{7,8,12} \xrightarrow{(0/25)} a \equiv -3 \pmod{168} \xrightarrow{168} a_{\min} = 165 \quad (0/25 \text{ نمره})$$

قضیه ک.م.م در

↓

همنهشتی

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv 4 \equiv -3 \pmod{7} \\ a \equiv 5 \equiv -3 \pmod{7} \\ a \equiv 9 \equiv -3 \pmod{12} \end{array} \right\} \text{مجموع ارقام } g+6+5=12 \quad (0/25 \text{ نمره})$$

-۴

$$5|4n+1 \xrightarrow{\times 5} 25|20n+5 \quad (0/25) \xrightarrow{\oplus} 25|16n^2+28n+6 \quad (0/5 \text{ نمره})$$

$$25|16n^2+8n+1 \quad (0/25)$$

به توان ۲

۵- گراف همبند: گراف G را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. (0/25 نمره)

بزرگترین مقسوم علیه مشترک: اگر بزرگترین مقسوم علیه دو عدد صحیح a و b را d بنامیم باید: $d|a, d|b$ (۱)

۲) $\forall m > 0; m|a, m|b \rightarrow m \leq \ell$ (0/25 نمره)
($m \in \mathbb{N}$)

همسایگی باز یک رأس: فرض کنید $v \in V(G)$ ، به مجموعه رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند همسایگی باز رأس v می‌گوییم.

استدلال استنتاجی: روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای گزاره‌ها یا قضیه‌هایی که قبلاً درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم. (0/25 نمره)

-۶

$$\left. \begin{array}{l} 3^2 \equiv -1 \pmod{5} \xrightarrow{500} 3^{100} \equiv 1 \equiv 6 \equiv 11 \pmod{25} \\ 3^3 \equiv -1 \pmod{7} \xrightarrow{333} 3^{999} \equiv -1 \xrightarrow{\times 3} 3^{1000} \equiv -3 \equiv 4 \equiv 11 \pmod{25} \end{array} \right\} \rightarrow 3^{1000} \equiv 11 \pmod{[5,7]} \quad (0/25 \text{ نمره})$$

$$\rightarrow 3^{1000} \equiv 11 \pmod{35} \rightarrow r=11 \quad (0/25 \text{ نمره})$$

-۷

(0/25)

$$\left. \begin{array}{l} n-2|2n^2-3n+7 \\ n-2|2(n-2)^2 \rightarrow n-2|2n^2-8n+8 \end{array} \right\} (0/25) \rightarrow \left. \begin{array}{l} n-2|5n-1 \\ n-2|5(n-2) \rightarrow n-2|5n-10 \end{array} \right\} \rightarrow n-2|9$$

$$\rightarrow n-2 = \pm 1, \pm 3, \pm 9 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n=3 \text{ یا } n=1 \text{ یا } n=5 \text{ یا } n=11 \quad (0/5 \text{ نمره})$$

۸- m یکی از مقسوم علیه‌های ۸۵ است و باید کمترین مقدار باشد. (۰/۲۵ نمره)

$$127 \equiv 42 \pmod{m} \rightarrow 85 \equiv 0 \pmod{m} \xrightarrow{m > 0}$$

$$[a]_m = [42]_m = [127]_m \quad (0/25) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{85=5 \times 17} m=5 \rightarrow a \equiv 42 \equiv 2 \pmod{5} \rightarrow a=5k+2 > 100 \rightarrow k > \frac{98}{5} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} K_{\min} = 20 \quad (0/25 \text{ نمره})$$

$$\rightarrow \boxed{a_{\min} = 102} \quad (0/25)$$

-۹

$$\overline{7a24b3}^9 \equiv 0 \rightarrow 7+a+2+4+b+3 \equiv 0 \rightarrow a+b \equiv -16 \quad (0/25 \text{ نمره})$$

$$\overline{7a24b3}^{11} \equiv 0 \rightarrow 3-b+4-2+a-7 \equiv 0 \rightarrow a-b \equiv 2 \quad (0/25 \text{ نمره})$$

چون a و b رقم هستند پس $0 \leq a+b \leq 18$, $-9 \leq a-b \leq 9$

$$a+b \equiv -16 \equiv 2 \equiv 11 \equiv 20 \rightarrow a+b=2 \text{ یا } a+b=11 \quad (0/25 \text{ نمره})$$

$$a-b \equiv 2 \equiv -9 \equiv 13 \rightarrow a-b=2 \text{ یا } a-b=9 \rightarrow a=9, b=0 \quad (0/25 \text{ نمره})$$

(در هیچ رابطه بالا صدق نمی‌کند)
(a+b=9x)

$$\rightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ a+b=2 \end{cases} \rightarrow a=2, b=0 \rightarrow \overline{aba} = 202 \quad (0/25 \text{ نمره})$$

$$\rightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ a+b=11 \end{cases} \rightarrow a = \frac{13}{2} \times$$

$$\rightarrow 202^{27} \equiv 2^{27} \xrightarrow{27=4(6)+3} (0/25) 2^{27} \equiv 2^3 \equiv \boxed{8} \quad (0/25)$$

-۱۰

$$(385, 175) = (5 \times 7 \times 11, 5^2 \times 7) = 5 \times 7 = 35 \quad (0/25 \text{ نمره})$$

$$\rightarrow 385x + 175y = 35 \xrightarrow{\div 35} 11x + 5y = 1 \quad (0/25) \rightarrow 11x \equiv 1 \pmod{5} \rightarrow x \equiv 1 \pmod{5} \rightarrow x = 5k + 1 \quad (0/25)$$

$$11(5k+1) + 5y = 1 \rightarrow y = -11k - 2 \quad (0/25 \text{ نمره})$$

$$\rightarrow x + y = 5k + 1 - 11k - 2 = -6k - 1 \rightarrow -6k - 1 \leq 99 \rightarrow k \geq -\frac{100}{6} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \geq -16$$

$$\rightarrow k_{\min} = -16 \quad (0/25) \rightarrow x + y = -6(-16) - 1 = \boxed{95} \quad (0/25)$$

-۱۱

یا $d = 83$ (۰/۲۵)

$$d = (11n - 3, 2n + 7) \rightarrow \begin{cases} d | 11n - 3 \xrightarrow{\times 2} d | 22n - 6 \\ d | 2n + 7 \xrightarrow{\times 11} d | 22n + 77 \end{cases} \xrightarrow{\square} d | 83 \xrightarrow{d > 0} d = 1 \times$$

$$\xrightarrow{d=83} 83 | 2n + 7 \rightarrow 2n + 7 \equiv 0 \rightarrow 2n \equiv -7 \equiv 76 \rightarrow n \equiv 38 \rightarrow n = 83k + 38 \quad (۰/۲۵)$$

$$100 \leq n \leq 999 \rightarrow 100 \leq 83k + 38 \leq 999 \rightarrow \frac{62}{83} \leq k \leq \frac{961}{83} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 1 \leq k \leq 11 \rightarrow \boxed{(۰/۲۵)} \text{ مقدار } ۱۱$$

-۱۲

$$[12a^2, 18a^4] = |6a^2| \times [2, 3a^2] = 6a^2 \times [2, 3a^2] \quad (۰/۲۵)$$

چون a فرد است پس $3a^2$ نیز فرد است پس (۰/۲۵) $[2, 3a^2] = 6a^2 \leftarrow (2, 3a^2) = 1$ (۰/۲۵)

$$\rightarrow [12a^2, 18a^4] = 6a^2 \times 6a^2 = \boxed{36a^4} \quad (۰/۲۵ \text{ نمره})$$

-۱۳

(۰/۲۵)

$$a = 11q + 2 \xrightarrow{\times 12} 12a = 132q + 24 \quad (0/25) \xrightarrow{\square} a = 132(q - q') - 53 \rightarrow a = 132(q - q' - 1) + 132 - 53$$

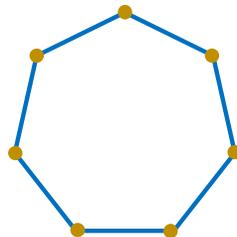
$$a = 12q' + 7 \xrightarrow{\times 11} 11a = 132q' + 77 \quad (0/25)$$

$$\rightarrow a = 132q'' + 79 \rightarrow \boxed{r = 79} \quad (۰/۲۵ \text{ نمره})$$

-۱۴

(۰/۲۵ نمره)

۲: منتظم همبند ۷ رأسی (C_7)



$$۲: \text{ منتظم } ۷ \text{ رأسی} \quad \begin{matrix} r = 2 \\ p = 7 \end{matrix} \rightarrow pr = 2q \rightarrow 2q = 7 \times 2 \rightarrow q = 7$$

(۰/۲۵ نمره)

$$q + q' = \binom{p}{2} \rightarrow 7 + q' = \binom{7}{2} = 21 \rightarrow \boxed{q' = 14}$$

(۰/۲۵ نمره)

تعداد یال گراف کامل

-۱۵

تعداد رأس	x	y	$\sum_{i=1}^{10} \log^{(i)} = 2q \rightarrow 6x + 5y = 2(34) = 68 \quad (0/25)$	$\left. \begin{matrix} x = 3 \\ y = 10 \end{matrix} \right\} \rightarrow$
درجه رأس	۶	۵		

چون در هر گراف تعداد رئوس فرد باید عددی فرد باشد پس گراف ما $(y=10)$ قابل قبول است. (نمره ۰/۲۵)
 (نمره ۰/۲۵) $x = 3$ = تعداد رئوس از درجه زوج \rightarrow

۱۶- الف) با کشیدن هر یال به درجه دو رأس یک واحد اضافه می‌شود. برای محاسبه تعداد یال در هر گراف، با جمع کردن درجه تمام رئوس هر یال را دوبار شمرده‌ایم پس برای محاسبه تعداد یال‌ها کافی مجموع درجات را تقسیم بر دو کنیم. (نمره ۰/۵)

ب) (نمره ۰/۲۵) $\sum_{i=1}^P \deg(i) = 2q \rightarrow \underbrace{(P-1) + (P-1) + \dots + (P-1)}_P = 2q \rightarrow 2q = P(P-1)$

(نمره ۰/۲۵) $\rightarrow q = \frac{P(P-1)}{2}$

-۱۷

abeda – abcda – abefa – abdea – adbea (نمره ۰/۲۵)

afeda – bcdeb (نمره ۰/۲۵)

۲۰	موفق باشید	
نام و نام خانوادگی مصحح:	نمره به حروف:	نمره به عدد: